

## 2022年度入学試験問題

# 数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

### 注 意

- 1 問題冊子は1冊(2ページ)、解答用紙は4枚、下書き用紙は3枚です。
- 2 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 すべての解答用紙の受験番号記入欄2箇所に受験番号を正しく記入しなさい。
- 4 解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また、答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 5 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

A, B, C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い、優勝者を決定する。

- 1 試合目は A と B が戦う。
- 自然数  $n$  に対し、 $n + 1$  試合目は  $n$  試合目の勝者と  $n$  試合目に戦わなかった人が戦う。
- 2 連勝した人が出た時点で、その人が優勝者となり、以後試合は行わない。
- すべての試合において、引き分けはないものとする。

A, B, C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし、 $p$  は  $0 < p < 1$  を満たす実数とする。

- A と B の試合：勝つ確率は A と B のどちらも  $\frac{1}{2}$  である。
- A と C の試合：A が勝つ確率は  $1 - p$ , C が勝つ確率は  $p$  である。
- B と C の試合：B が勝つ確率は  $1 - p$ , C が勝つ確率は  $p$  である。

$n$  試合目で優勝者が決定する確率を  $a_n$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_1, a_2, a_3, a_4$  を求めよ。
- (2) 自然数  $k$  に対し、 $a_{3k}$  を求めよ。
- (3) C が優勝する確率を求めよ。
- (4) 1 以上 99 以下の自然数  $N$  に対し  $p = \frac{N}{100}$  であるとする。このとき C が優勝する確率が  $\frac{1}{3}$  以上になるような  $N$  の最小値を求めよ。

2

$a$  を実数とし、座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 + (a + 2)x^2 + 2ax + 2$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  がどのような値をとっても曲線  $C$  は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち、 $x$  座標の小さい方を点 A, もう一方を点 B とし、その 2 点を通る直線を  $L$  とする。曲線  $C$  と直線  $L$  が異なる 3 点で交わり、その交点がすべて線分 AB 上にあるような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $a$  の値が (2) で求めた範囲にあるとする。このとき、曲線  $C$  と (2) で定めた直線  $L$  で囲まれた部分の面積  $S(a)$  の最小値を求めよ。

3

$l$  を正の実数とし、四面体 OABC において、各辺の長さを

$$OA = \frac{1}{2}l, \quad OB = OC = l, \quad AB = CA = l, \quad BC = \sqrt{2}l$$

とする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$  とし、点 H は  $\vec{OH} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$  を満たすとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 H は 3 点 A, B, C が定める平面上に存在することを示せ。
- (2)  $|\vec{OH}|$  の値を求めよ。
- (3)  $\angle OHB$  の大きさを求めよ。
- (4) 四面体 OABC の体積  $V$  を求めよ。

4

$-1 < x < 1$  に対して

$$f(x) = \log(1 + x) + \log(1 - x) - x \log(1 - x)$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $-1 < x < 1$  のとき、 $f'(x) \geq 0$  であることを示せ。
- (2)  $-1 < x < 1, x \neq 0$  のとき、 $\frac{f(x)}{x} > 0$  であることを示せ。
- (3)  $n$  が 2 以上の整数のとき、不等式

$$\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。