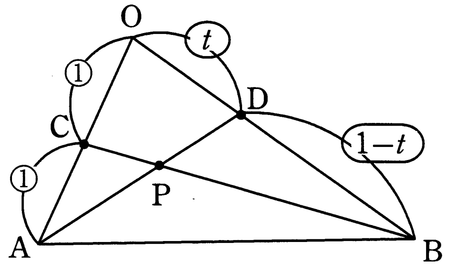
$\boxed{1}$

(1) 点Cは辺OAの中点だから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ …①

点Dは辺OBを $t:(1-t)$ に内分するから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ …②



AP:PD $=m:(1-m)$ （mは実数）とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-m)\vec{a}+mt\vec{b} \quad \cdots ③$$

BP:PC $=n:(1-n)$ （nは実数）とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=n\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-n)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{1}{2}n\vec{a}+(1-n)\vec{b} \quad \cdots ④$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立だから③，④より

$1-m=\dfrac{1}{2}n$，$mt=1-m$　　これを解いて，$m=\dfrac{1}{2-t}$，$n=\dfrac{2-2t}{2-t}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$　…答

[別解1]　△OBC と直線 AD に関してメネラウスの定理より

$\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AO}}=1$　　したがって，$\dfrac{t}{1-t}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

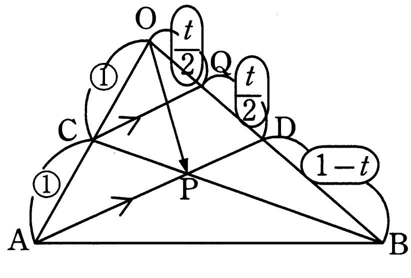
これより，BP：PC $=(2-2t):t$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2-2t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$

[別解2]　ODの中点を Q とおくと，

QD:DB=CP:PB$=\dfrac{t}{2}:(1-t)=t:(2-2t)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2-2t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$



(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{1}{(2-t)^2}\{(1-t)^2|\vec{a}|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\}$

$=\dfrac{1}{(2-t)^2}\{(t^2-2t+1)\cdot1^2+(2t-2t^2)\cdot\dfrac{1}{2}+t^2\cdot2^2\}$

$=\dfrac{4t^2-t+1}{(2-t)^2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geqq0$ だから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq1$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq1$ である。

よって，$\dfrac{4t^2-t+1}{(2-t)^2}\leqq1$

$(2-t)^2>0$ だから，$4t^2-t+1\leqq(t-2)^2$

これを解いて，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$0<t<1$ であり，$0<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$ だから，

求める t の範囲は　$0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　…答

$\boxed{2}$

(x,y) から $(x+1,y)$, $(x-1,y)$, $(x,y+1)$, $(x,y-1)$ に移動する事象をそれぞれ B_1, B_2, B_3, B_4 とし，
(x,y) から $(x+1,y+1)$, $(x-1,y+1)$, $(x+1,y-1)$, $(x-1,y-1)$ に移動する事象をそれぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 とする。

このとき，$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=\dfrac{1}{9}$，$P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=P(C_4)=\dfrac{1}{36}$ である。

(1)　$|x_1|=1$ かつ $|y_1|=1$ となるのは，1回の移動で x 方向，y 方向ともに移動する場合，
すなわち事象 C_1, C_2, C_3, C_4 のいずれかが起こる場合である。

よって求める確率は，$\dfrac{1}{36}\times 4=\dfrac{1}{9}$ …答

(2)　$|x_n|=n$ となるのは，n 回とも右，または n 回とも左に移動する場合であり、
$|y_n|=n$ となるのは，n 回とも上，または n 回とも下に移動する場合である。

よって，$|x_n|=n$ かつ $|y_n|=n$ となるのは，C_1 または C_2 または C_3 または C_4 のいずれかが n 回続けて起こる場合である。

ゆえに求める確率は，$\left(\dfrac{1}{36}\right)^n\times 4=4\left(\dfrac{1}{36}\right)^n$ …答

(3)　1回の移動で右へ移動するのは事象 B_1, C_1, C_3 いずれかが起こる場合（この事象を A とする)だから，

その確率は　$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6}$ である。

$x_n=n$ となるのは，n 回とも右へ移動する場合であるから，事象 A が n 回続けて起こる場合である。

よって求める確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ …答

(4)　$|x_n|=n$ となるのは，$x_n=n$ または $x_n=-n$ のときである。

左と右の移動は同じ確率で起こるから，(3) と同様に，$x_n=-n$ となる確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

よって，$|x_n|=n$ となる確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

また，左右への移動と上下への移動は同じ確率で起こるから，$|y_n|=n$ となる確率も $2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

したがって，

$(|x_n|=n$ または $|y_n|=n$ となる確率$)$

$=(|x_n|=n$ となる確率$)+(|y_n|=n$ となる確率$)-(|x_n|=n$ かつ $|y_n|=n$ となる確率$)$

$=2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-4\left(\dfrac{1}{36}\right)^n$

$=4\left\{\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{36}\right)^n\right\}$ …答

$\boxed{3}$

(1) 証明

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$　…終

(2) 証明

以下，数学的帰納法によって示す.

$n = 1$ のとき　（左辺）＝（右辺）（$= \cos\theta + i\sin\theta$）は成り立つ。

$n = k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ が成り立つと仮定する。

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \{\cos(k\theta) + \sin(k\theta)\} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$

$k\theta = \alpha$,　$\theta = \beta$ とおいて(1)の結果を用いると,

$= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)$

$= \cos\{(k+1)\theta\} + i\sin\{(k+1)\theta\}$

よって，$n = k+1$ のときも成り立つ。以上より，帰納的に与えられた等式は成り立つ。…終

(3) 条件（a）より，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0<\theta<\pi)$　とおける。

条件（b）と（2）の結果より，

$z^5 + z = \cos 5\theta + i\sin 5\theta + \cos\theta + i\sin\theta$

$= (\cos 5\theta + \cos\theta) + i(\sin 5\theta + \sin\theta)$　より，これが実数であるから,

$\sin 5\theta + \sin\theta = 2\sin\dfrac{5\theta+\theta}{2}\cos\dfrac{5\theta-\theta}{2} = 2\sin 3\theta\cos 2\theta = 0$ であるから,

$0<3\theta<3\pi$ で $\sin 3\theta = 0$ より，$3\theta = \pi$，2π　$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

$0<2\theta<2\pi$ で $\cos 2\theta = 0$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$　$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

従って，求める z は，$z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$，$\pm\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　…答

4

(1) 証明　$f(a)=0$，$g(a)=2ae^{-a}>0$　($a \geqq 1$ より)　よって，$f(a)<g(a)$ が成り立つ。…終

証明　$f(2a)-g(2a)=3ae^{2a}-ae^{-2a}=ae^{-2a}(e^{4a}-3)$

$a \geqq 1$，$e>2$ より，$e^{4a} \geqq e^4>2^4=16$ であるから，$e^{4a}>3$

$a \geqq 1>0$，$e^{-2a}>0$，$e^{4a}>3$ より，$f(2a)-g(2a)=ae^{-2a}(e^{4a}-3)>0$

よって，$f(2a)>g(2a)$ が成り立つ。…終

(2) 証明　$0<x<a-1$ のとき，

$a-x>0$ より，$|a-x|=a-x$

$a+x>0$ より，$|a+x|=a+x$

これらより，$f(x)=(a-x)e^x$，$g(x)=(a+x)e^{-x}$ となる。

$h(x)=f(x)-g(x)=(a-x)e^x-(a+x)e^{-x}$ とおく。

$$h'(x)=-e^x+(a-x)e^x-e^x+(a+x)e^{-x}=e^{-x}\{(a-1-x)e^{2x}+x+a-1\}$$

$0<x<a-1$ より，$a-1-x>0$，$x+a-1>0$，$e^{-x}>0$，$e^{2x}>0$ であるから，$h'(x)>0$

よって，$h(x)$ は $0 \leqq x<a-1$ で増加する。

ゆえに，$0<x<a-1$ のとき，$h(x)>h(0)=f(0)-g(0)=0$

したがって，$0<x<a-1$ のとき，$f(x)>g(x)$ が成り立つ。…終

(3) $f(-x)=g(x)$ となるから，C と D は y 軸に関して対称な位置関係にある。C と D の共有点の1つは，$(0,\ ae^a)$ である。$x>0$ の領域で，C と D がただ1つの共有点をもてば，C と D は $x<0$ の領域でもただ1つの共有点をもち，合計3個の共有点をもつことになる。

$h(x)=f(x)-g(x)$ は連続な関数であり，(1)(2)より，$a>1$ のとき，

$0<x<a-1$ で $h(x)>0$，$h(a)<0$，$h(2a)>0$

となるから，$h(x)=0$ は，区間 $(a-1,\ a)$ と区間 $(a,\ 2a)$ にそれぞれ少なくとも1つの解をもつ。

よって，$a>1$ のとき，C と D は少なくとも5個の解をもつ。したがって，C と D がちょうど3個の共有点をもつための必要条件は $a=1$ である。

以下，$a=1$ とする。

$f(x)=|1-x|e^x$，$g(x)=|1+x|e^{-x}$ より，$h(x)=|1-x|e^x-|1+x|e^{-x}$ となる。

$h(0)=0$

$0<x<1$ のとき，$h(x)=(1-x)e^x-(1+x)e^{-x}$

$h'(x)=e^x+(1-x)e^x-e^{-x}+(1+x)e^{-x}=-x(e^x-e^{-x})<0$　($x>0$，$e^x>e^{-x}$ より)

$h(0)=0$，$h'\ x\ <0$ より，区間 $(0,\ 1)$ に $h(x)=0$ の実数解は存在しない。

$x \geqq 1$ のとき，$h(x)=(x-1)e^x-(1+x)e^{-x}$

$h'\ x\ =e^x+(x-1)e^x-e^{-x}+(1+x)e^{-x}=x(e^x+e^{-x})>0$　($x>0$，$e^x>e^{-x}>0$ より)

$h(x)$ は連続な関数であり，(1)(2)より，

$h(1)<0$，$h(2)>0$，$h'(x)>0$

となるから，$h(x)=0$ は，区間 $(1,\ 2)$ にただ1つの解をもつ。

以上より，$a=1$ のとき，$h(x)=0$ は3個の実数解をもち，CとDの共有点がちょうど3個となる。…答