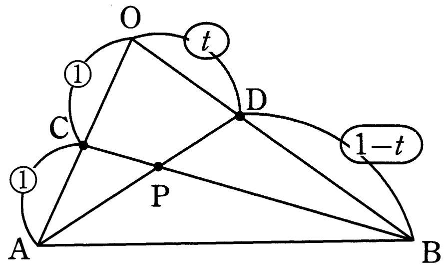
1

(1) 点Cは辺OAの中点だから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ …①



点Dは辺OBを $t:(1-t)$ に内分するから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ …②

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=m:(1-m)$ （mは実数）とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-m)\vec{a}+mt\vec{b}\ \cdots③$$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=n:(1-n)$ （nは実数）とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=n\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-n)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{1}{2}n\vec{a}+(1-n)\vec{b}\ \cdots④$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立だから③，④より

$1-m=\dfrac{1}{2}n$，$mt=1-m$　　これを解いて，$m=\dfrac{1}{2-t}$，$n=\dfrac{2-2t}{2-t}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$　…答

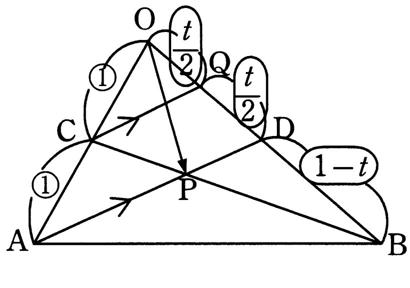
[別解1]　△OBCと直線ADに関してメネラウスの定理より

$\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AO}}=1$　　したがって，$\dfrac{t}{1-t}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

これより，$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=(2-2t):t$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2-2t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$

[別解2]　ODの中点をQとおくと，



$\mathrm{QD}:\mathrm{DB}=\mathrm{CP}:\mathrm{PB}=\dfrac{t}{2}:(1-t)=t:(2-2t)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2-2t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{t}{2-t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{t}{2-t}\vec{b}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{1}{(2-t)^2}\{(1-t)^2|\vec{a}|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\}$

$=\dfrac{1}{(2-t)^2}\{(t^2-2t+1)\cdot1^2+(2t-2t^2)\cdot\dfrac{1}{2}+t^2\cdot2^2\}$

$=\dfrac{4t^2-t+1}{(2-t)^2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geqq0$ だから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq1$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq1$ である。

よって，$\dfrac{4t^2-t+1}{(2-t)^2}\leqq1$

$(2-t)^2>0$ だから，$4t^2-t+1\leqq(t-2)^2$

これを解いて，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$0<t<1$ であり，$0<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$ だから，

求める t の範囲は　$0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　…答

2

(x,y) から $(x+1,y)$, $(x-1,y)$, $(x,y+1)$, $(x,y-1)$ に移動する事象をそれぞれ B_1 , B_2 , B_3 , B_4 とし,
(x,y) から $(x+1,y+1)$, $(x-1,y+1)$, $(x+1,y-1)$, $(x-1,y-1)$ に移動する事象をそれぞれ C_1 , C_2 , C_3 , C_4 とする。

このとき, $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=\dfrac{1}{9}$, $P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=P(C_4)=\dfrac{1}{36}$ である。

(1) $|x_1|=1$ かつ $|y_1|=1$ となるのは, 1回の移動で x 方向, y 方向ともに移動する場合,
すなわち事象 C_1 , C_2 , C_3 , C_4 のいずれかが起こる場合である。

よって求める確率は, $\dfrac{1}{36}\times 4=\dfrac{1}{9}$ …答

(2) $|x_n|=n$ となるのは, n 回とも右, または n 回とも左に移動する場合であり、
$|y_n|=n$ となるのは, n 回とも上, または n 回とも下に移動する場合である。

よって, $|x_n|=n$ かつ $|y_n|=n$ となるのは, C_1 または C_2 または C_3 または C_4 のいずれかが n 回続けて起こる場合である。

ゆえに求める確率は, $\left(\dfrac{1}{36}\right)^n\times 4=4\left(\dfrac{1}{36}\right)^n$ …答

(3) 1回の移動で右へ移動するのは事象 B_1 , C_1 , C_3 いずれかが起こる場合（この事象を A とする)だから,

その確率は $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6}$ である。

$x_n=n$ となるのは, n 回とも右へ移動する場合であるから, 事象 A が n 回続けて起こる場合である。

よって求める確率は, $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ …答

(4) $|x_n|=n$ となるのは, $x_n=n$ または $x_n=-n$ のときである。

左と右の移動は同じ確率で起こるから, (3) と同様に, $x_n=-n$ となる確率は, $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

よって, $|x_n|=n$ となる確率は, $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

また, 左右への移動と上下への移動は同じ確率で起こるから, $|y_n|=n$ となる確率も $2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

したがって,

$(|x_n|=n$ または $|y_n|=n$ となる確率$)$

$=(|x_n|=n$ となる確率$)+(|y_n|=n$ となる確率$)-(|x_n|=n$ かつ $|y_n|=n$ となる確率$)$

$=2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-4\left(\dfrac{1}{36}\right)^n$

$=4\left\{\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{36}\right)^n\right\}$ …答

$\boxed{3}$

(1) $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)=4b_n$

$b_1=a_2-a_1=4$

したがって，$\{b_n\}$ は，初項4，公比4の等比数列となり，一般項は $b_n=4\times4^{n-1}=4^n$ …答

(2) $n\geqq2$のとき，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}4^n=1+\dfrac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$

すなわち　$a_n=\dfrac{4^n-1}{3}$

初項は　$a_1=1$　なので，この式は　$n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，　一般項は　$a_n=\dfrac{4^n-1}{3}$　…答

(3) $T_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}k\times\dfrac{4^k-1}{3}=\dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(k\times4^k)-\dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k$

ここで $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\times4^k$　とおく。

$$
\begin{array}{rl}
S_n= & 1\times4+2\times4^2+3\times4^3+\cdots+(n-1)\times4^{n-1}+n\times4^n \\
-\ 4S_n= & \qquad 1\times4^2+2\times4^3+\cdots+(n-2)\times4^{n-1}+(n-1)\times4^n+n\times4^{n+1} \\
\hline
-3S_n= & 4+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1}+4^n-n\times4^{n+1}
\end{array}
$$

したがって，

$$-3S_n=\frac{4(4^n-1)}{4-1}-n\times4^{n+1}$$

$$S_n=\frac{n\times4^{n+1}}{3}-\frac{4(4^n-1)}{9}$$

T_n の式に代入して，　$T_n=\dfrac{(3n-1)\times4^{n+1}+4}{27}-\dfrac{n(n+1)}{6}$ …答

別解

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(k\times4^k)-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{1}{3}(k+1)-\frac{4}{9}\right\}\times4^{k+1}-\left(\frac{1}{3}k-\frac{4}{9}\right)\times4^k\right]-\frac{1}{3}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left\{\frac{1}{3}(n+1)-\frac{4}{9}\right\}\times4^{n+1}+\frac{4}{9}\right]-\frac{n(n+1)}{6}=\frac{(3n-1)\times4^{n+1}+4}{27}-\frac{n(n+1)}{6}$$

$\boxed{4}$

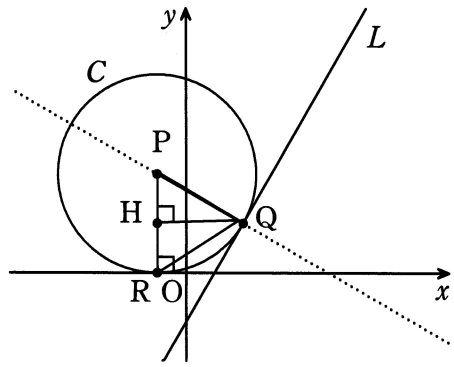
(1) 円Cはx軸に接し，三角形PQRは正三角形であるから，

直線PQがx軸となす角は$\dfrac{\pi}{6}$となる。したがって，

(PQの傾き)$=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ …答

直線Lは直線PQに垂直である。したがって，

(Lの傾き)$=\sqrt{3}$ …答



(2) $y=x^2$のとき，$y'=2x$

$2x=\sqrt{3}$より$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき，$y=x^2=\dfrac{3}{4}$　　よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

Qから線分PRに垂線QHを下す。PRはx軸に垂直だから$\mathrm{RH}=\dfrac{3}{4}$となり，三角形PQRは正三角形であるから，$\mathrm{PR}=2\mathrm{RH}=\dfrac{3}{2}$となる。また，$\mathrm{HQ}=\sqrt{3}\,\mathrm{RH}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$である。

よって，Hのx座標（Pのx座標でもある）は，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$となる。

したがって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$ …答

(3) 直線PQの方程式は，$y-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}$$

直線PQと放物線Fの共有点のx座標は，方程式$x^2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{5}{4}$の解である。

$$x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{4}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)=0 \qquad x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

直線PQと放物線Fで囲まれる部分の面積をSとすると，

$$S=\int_{-\frac{5\sqrt{3}}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{4}\right)-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_{-\frac{5\sqrt{3}}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{5}{4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{32}{27}\sqrt{3}$$ …答