$\boxed{1}$

(1)　$n=1$ のとき　$a_1=S_1$　であるから

$$a_1=\frac{7}{6}a_1-\frac{7}{6}\qquad \text{よって}\qquad a_1=7$$

また，漸化式より　$S_{n+1}=\frac{7}{6}(a_{n+1}-1)$　であるから

$$S_{n+1}-S_n=\frac{7}{6}(a_{n+1}-1)-\frac{7}{6}(a_n-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad a_{n+1}=\frac{7}{6}(a_{n+1}-a_n)$$

$$\Leftrightarrow\quad a_{n+1}=7a_n$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 7，公比 7 の等比数列である。

したがって　　$a_n=7^n$　…答

(2)　7^n の桁数が 89 であるから，n を自然数として

$$10^{88}\leqq 7^n<10^{89}$$

と表される。各辺の常用対数をとると

$$\log_{10}10^{88}\leqq\log_{10}7^n<\log_{10}10^{89}\quad\Leftrightarrow\quad 88\leqq n\log_{10}7<89$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{88}{\log_{10}7}\leqq n<\frac{89}{\log_{10}7}$$

$$\Leftrightarrow\quad 104.1\cdots\cdots\leqq n<105.3\cdots\cdots$$

以上から，求める値は　$n=105$　…答

(3)　(2) より，a_{105} の一の位の数字を求める。

a_nの一の位の数字の並べて新しく数列 $\{b_n\}$ と定義する。このとき

$$b_1=7,\ b_2=9,\ b_3=3,\ b_4=1,\ b_5=7,\ b_6=9,\ \cdots$$

となり，7，9，3，1　を繰り返す。実際に

$$7^{n+4}-7^n=7^n\cdot 10\cdot 240$$

であるから，7^{n+4}　と　7^n　を 10 で割った余りは等しくなり，一の位の数字も等しい。

以上から，求める値は　$b_{105}=7$　…答

(4)　(2) より，a_{105} の最高位の数字を求める。最高位の数字を m とすると

$$m\cdot 10^{88}\leqq 7^{105}<(m+1)\cdot 10^{88}$$

と表される。各辺の常用対数をとると

$$\log_{10}m\cdot 10^{88}\leqq\log_{10}7^{105}<\log_{10}(m+1)\cdot 10^{88}$$

$$\Leftrightarrow\quad 88+\log_{10}m\leqq 105\log_{10}7<88+\log_{10}(m+1)$$

$$\Leftrightarrow\quad \log_{10}m\leqq 0.7355<\log_{10}(m+1)$$

ここで，$\log_{10}5=1-\log_{10}2=0.6990$，$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$ であるから

求める値は　　$m=5$　…答

$\boxed{2}$

(1)　D と x 軸との交点の x 座標が $\pm p$ であり，$-p \leqq x \leqq p$ において曲線 D は x 軸の上方にあるから

$$S = a\int_{-p}^{p}(x+p)(x-p)\,dx$$

$$= -\frac{a}{6}\{p-(-p)\}^3 = -\frac{4}{3}ap^3 \quad \cdots 答$$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とおくと　$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$g(x)=ax^2+b$ とおくと　$g'(x)=2ax$

題意より　$f(t)=g(t)$　かつ　$f'(t)=g'(t)$

よって
$$\begin{cases} \dfrac{1}{t^2+1}=at^2+b & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{-2t}{(t^2+1)^2}=2at & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② より　$a=-\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$　$\cdots$ 答

① に代入して　$b=\dfrac{1}{t^2+1}+\dfrac{t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}$　$\cdots$ 答

(3)　$ax^2+b=0$ を解くことにより　$p=\sqrt{-\dfrac{b}{a}}=\sqrt{2t^2+1}$

よって，(1)，(2) より

$$S=-\frac{4}{3}a(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4(2t^2+1)\sqrt{2t^2+1}}{3(t^2+1)^2} \quad \cdots 答$$

(4)　$t^2=X>0$ とし，$S(X)=\dfrac{(2X+1)^{\frac{3}{2}}}{(X+1)^2}$　$(X>0)$ とする。

$$S'(X)=\frac{\frac{3}{2}(2X+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2(X+1)^2-(2X+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 2(X+1)}{(X+1)^4}$$

$$=\frac{(2X+1)^{\frac{1}{2}}(-X+1)}{(X+1)^3}$$

X	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(X)$		$+$	0	$-$
$S(X)$		↗	極大	↘

$S'(X)=0$　とおくと　$X=1$

右の増減表より

$X=1$ のとき，$S(X)$ は最大値をとる。このとき　$t>0$　より　$t=1$

(2) より　$a=-\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{3}{4}$

したがって，求める方程式は　$y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}$　$\cdots$ 答

$\boxed{3}$

以下，9 枚の札をすべて区別して考える。また，A，B，C が取り出す順番は指定されていない。

(1)　A が最初に 1 枚ずつ取り出すとする。A は最初に何を取り出してもよい。

A は 2 枚目に 1 枚目と同じ数字の札を取り出すとよいので，求める確率は　$1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$　…答

(2)　C，A，B の順に取り出すとする。

C は $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ の札を取り出すので，その確率は

$$\frac{3^3}{{}_9C_3}=\frac{3\cdot2\cdot3^3}{9\cdot8\cdot7}=\frac{9}{28}$$

残る札は $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ の札がそれぞれ 2 枚である。A は (1) と同様に考えると，異なる数字の札を取り出す確率は

$$1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

A が $\boxed{1}$,$\boxed{2}$ の札を取り出したとして考えてよい。残る札は $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$,$\boxed{3}$ である。

B は $\boxed{3}$,$\boxed{3}$ 以外の札を取り出すので，余事象を考えるとその確率は

$$1-\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{5}{6}$$

よって，求める確率は

$$\frac{9}{28}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{14}\quad\cdots\text{答}$$

(3)　C，A，B の順に取り出すとする。

C が 1 種類の札だけを取り出したときは適さない。

ⅰ)　C が 3 種類の札を取り出したとき

A はどの札を取り出してもよいので，(2) の途中経過より確率は　$\frac{9}{28}$

ⅱ)　C が 2 種類の札を取り出したとき

C が 2 種類の札を取り出す確率は

$$\frac{{}_3C_2\cdot2\cdot{}_3C_2\cdot3}{{}_9C_3}=\frac{3\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7}=\frac{9}{14}$$

C が $\boxed{1}$,$\boxed{1}$,$\boxed{2}$ の札を取り出したとして考えてよい。残る札は $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$,$\boxed{3}$,$\boxed{3}$ である。

A は $\boxed{3}$,$\boxed{3}$ 以外の札を取り出すので，余事象を考えるとその確率は

$$1-\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{4}{5}$$

よって，このときの確率は　$\frac{9}{14}\cdot\frac{4}{5}$

以上から，求める確率は

$$\frac{9}{28}+\frac{9}{14}\cdot\frac{4}{5}=\frac{9}{28}\left(1+\frac{8}{5}\right)$$

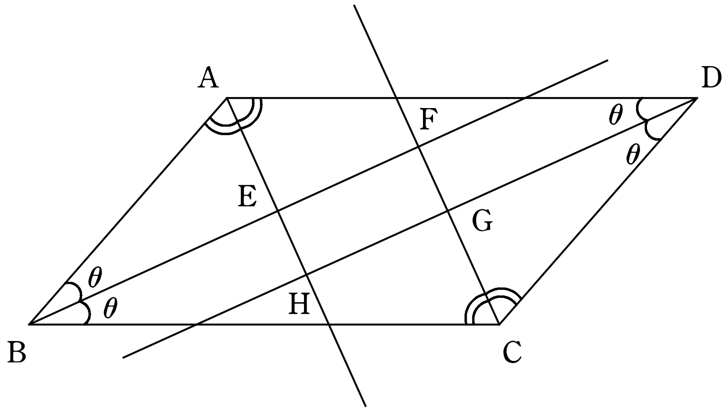
$$=\frac{117}{140}\quad\cdots\text{答}$$

4

(1)　$\angle \mathrm{BAD}=\pi-2\theta$

$\angle \mathrm{BAE}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

よって　$\angle \mathrm{FEH}=\angle \mathrm{AEB}=\dfrac{\pi}{2}$　…答



(2)　(1) より，△ABE において正弦の定義により

$\mathrm{AE}=x\sin\theta$　…答

△ADH において同様にして

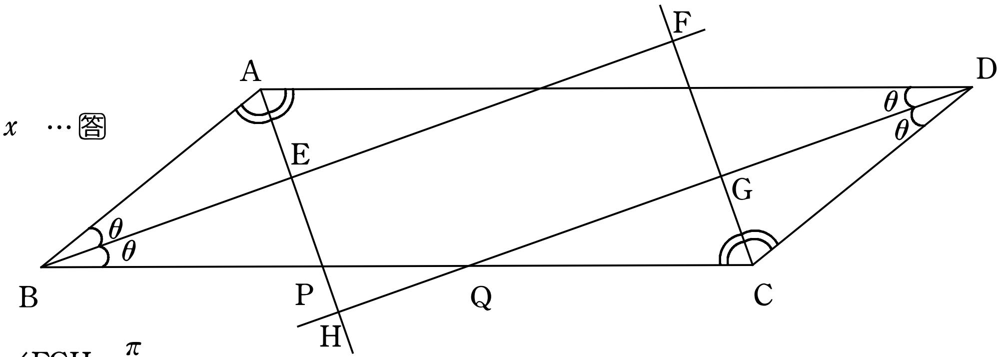
$\mathrm{AH}=y\sin\theta$　…答

(3)　$x<y$ であるから，AH>2AE が必要十分条件である。

よって，(2) より

$y\sin\theta>2x\sin\theta$

$\sin\theta>0$ であるから　$y>2x$　…答



(4)　(1) と同様にして，$\angle \mathrm{EHG}=\angle \mathrm{FGH}=\dfrac{\pi}{2}$

よって，四角形 EFGH は長方形である。

(2) より　$\mathrm{EH}=(y-x)\sin\theta$

(2) と同様にして　$\mathrm{EF}=(y-x)\cos\theta$

i）$y\leqq 2x$ のとき

(3) より，点 H は平行四辺形 ABCD の周上または内部にあるから

$S=\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}=(x-y)^2\sin\theta\cos\theta$　…答

ii）$y>2x$ のとき

(3) より，点 H は平行四辺形 ABCD の外部にある。

辺 BC と直線 AH，DH の交点をそれぞれ P，Q とすると　$\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}=x$，$\mathrm{PQ}=y-2x$

よって，△HPQ の面積は　$\dfrac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$

図形の対称性により

$S=$(平行四辺形 ABCD)-2△HPQ

$=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta-(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$

$=(2xy-3x^2)\sin\theta\cos\theta$　…答