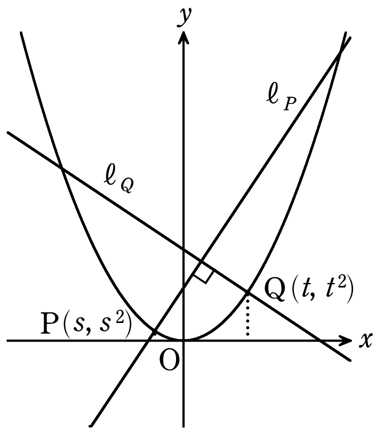
1

(1)　$C:\ y=x^2$

$y'=2x$ より，点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$ における接線の傾きは $2s$ であるから，

法線 ℓ_{P} の傾きは $-\dfrac{1}{2s}$ である。



よって，直線 ℓ_{P} の方程式は

$$y=-\frac{1}{2s}(x-s)+s^2$$

$$y=-\frac{1}{2s}x+s^2+\frac{1}{2}\ \cdots 答\quad\cdots ①$$

(2)　(1) と同様に，点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における法線 ℓ_{Q} の傾きは $-\dfrac{1}{2t}$ であり，

法線 ℓ_{P} と法線 ℓ_{Q} が直交することから

$$-\frac{1}{2s}\cdot\left(-\frac{1}{2t}\right)=-1 \text{ より}\qquad \therefore\ t=-\frac{1}{4s}\ \cdots ②$$

よって，直線 ℓ_{Q} の方程式は $y=-\dfrac{1}{2t}x+t^2+\dfrac{1}{2}$ に ② を代入して

$$y=2sx+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{2}\ \cdots 答\quad\cdots ③$$

(3)　① と ③ を連立して

$$2sx+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2s}x+s^2+\frac{1}{2}$$

$$\left(2s+\frac{1}{2s}\right)x=s^2-\frac{1}{16s^2}$$

$$\left(2s+\frac{1}{2s}\right)x=\frac{1}{4}\left(2s+\frac{1}{2s}\right)\left(2s-\frac{1}{2s}\right)$$

$2s+\dfrac{1}{2s}<0$ より　$\therefore\ x_0=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{4s}\right)$

② に代入して

$$y_0=2s\cdot\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{2}=s^2+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{4}$$

よって，　$x_0=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{4s}\right)$，　$y_0=s^2+\dfrac{1}{16s^2}+\dfrac{1}{4}$ …答　…④

(4)　④ より，$s^2>0$，$\dfrac{1}{16s^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$y_0=s^2+\frac{1}{16s^2}+\frac{1}{4}\geqq 2\sqrt{s^2\cdot\frac{1}{16s^2}}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

y_0 は最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。そのときの s は，$s^2=\dfrac{1}{16s^2}$ を満たすから

$s<0$ より　$\therefore\ s=-\dfrac{1}{2}$ のときである。 …答

$\boxed{2}$

(1)　$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 7a_n$ より

数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 7 の等比数列であるから

$$a_n = 7^{n-1}$$

a_n が 89 桁の整数であることから

$$10^{88} \leqq 7^{n-1} < 10^{89} \cdots ①$$

が成り立つ。① の各辺の常用対数をとって

$$88 \leqq \log_{10} 7^{n-1} < 89 \iff 88 \leqq (n-1)\log_{10} 7 < 89$$

$\log_{10} 7 = 0.8451 > 0$ より

$$\frac{88}{0.8451} \leqq n-1 < \frac{89}{0.8451}$$

$$104.1\cdots \leqq n-1 < 105.3\cdots$$

$$105.1\cdots \leqq n < 106.3\cdots \quad \cdots ②$$

よって，② を満たす整数より　$n = 106$ である。…答

(2)　(1) より　$n = 106$ であるから　$a_{106} = 7^{105}$　…③

ここで，$7^1 \equiv 7 \pmod{10}$，$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$，$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$，$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ より

7^n の一の位の数字は，7，9，3，1 の数字が循環する。

$$7^{105} = (7^4)^{26} \cdot 7^1 \equiv 1^{26} \cdot 7^1 \equiv 7 \pmod{10}$$

よって，③ より　$a_{106} = 7^{105}$ の一の位の数字は 7 である。…答

(3)　$\log_{10} 7^{105} = 105 \log_{10} 7 = 105 \times 0.8451 = 88.7355\cdots$

よって，$7^{105} = 10^{88.7355\cdots} = 10^{88} \cdot 10^{0.7355\cdots}$ …④

④ において，10^{88} が 89 桁を表し，$10^{0.7355\cdots}$ が最高位の数字を表す。…⑤

ここで，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 0.6990,\quad \log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$$

であり，　$0.6990 < 0.7355 < 0.7781$ より　$10^{0.6990} < 10^{0.7355} < 10^{0.7781}$ が成り立つから

$$\therefore\ 5 < 10^{0.7355} < 6 \cdots ⑥$$

よって，⑤，⑥ より

$a_{106} = 7^{105}$ の最高位の数字は 5 である。…答

3

条件：$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=r\,\mathrm{OP}$ …(※)

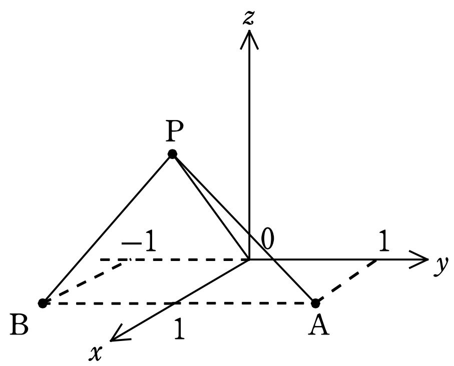
点 $\mathrm{A}(1,1,0)$，$\mathrm{B}(1,-1,0)$，$\mathrm{P}(a,b,c)$ より

$$\mathrm{AP}^2=(a-1)^2+(b-1)^2+c^2,\quad \mathrm{BP}^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2,\quad \mathrm{OP}^2=a^2+b^2+c^2$$

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ であるから

$$(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2 \quad \therefore\ b=0$$

このことから，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2=(a-1)^2+c^2+1$ …①　，$\mathrm{OP}^2=a^2+c^2$ …②　とする。



(1)　$r=1$ のとき，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{OP}$ より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2=\mathrm{OP}^2$

①,② より　$(a-1)^2+c^2+1=a^2+c^2$　$\therefore\ a=1$

よって，② より　$\mathrm{OP}^2=c^2+1$ であるから

線分 OP が最小となるのは $c=0$ のときである。

よって，　$a=1$，$b=0$，$c=0$ のとき …答

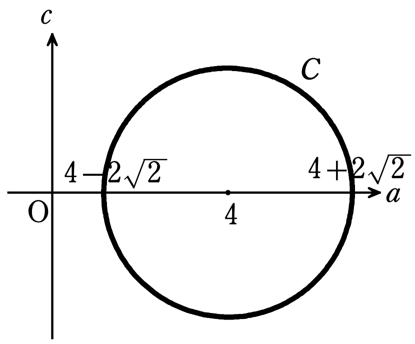
(2)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OP}$ より $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2=\dfrac{3}{4}\mathrm{OP}^2$

①,② より　$(a-1)^2+c^2+1=\dfrac{3}{4}(a^2+c^2)$

$$4(a-1)^2+4c^2+4=3a^2+3c^2$$

$$a^2-8a+c^2+8=0$$

$$(a-4)^2+c^2=8 \quad \cdots③$$



③ は，点 $(4,0)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円 C を表すから，

a のとり得る値の範囲は

$$4-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{2} \text{ である。…答}$$

別解

$$c^2=-a^2+8a-8\geqq 0 \text{ より}$$

$$a^2-8a+8\leqq 0$$

よって，　$4-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{2}$　としてもよい。

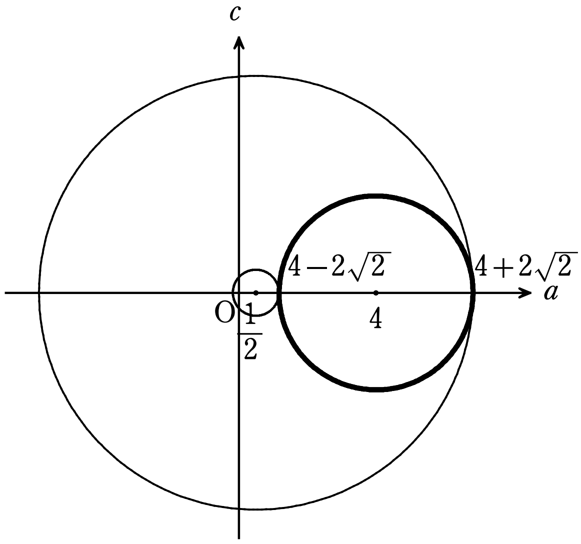
(3)　(2) と同様に ③ を満たす。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,0,c)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-1,-1,c)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a(a-1)+c^2$

$a^2-a+c^2=k$ とおくと　$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+c^2=k+\dfrac{1}{4}\ (>0)$ …④

④ は，点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}$ の円を表すから

(i) 半径 $\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}$ が最大となるとき



右の図から　$\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}=4+2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ より

$\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{7}{2}+2\sqrt{2}$

$k+\dfrac{1}{4}=\dfrac{49}{4}+2\sqrt{2}+8$

$\therefore\ k=20+14\sqrt{2}$

(ii) 半径 $\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}$ が最小となるとき

右の図から　$\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}=4-2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ より

$\sqrt{k+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{7}{2}-2\sqrt{2}$

$k+\dfrac{1}{4}=\dfrac{49}{4}-2\sqrt{2}+8$

$\therefore\ k=20-14\sqrt{2}$

よって，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の値は

$a=4+2\sqrt{2}$ のとき最大値：$20+14\sqrt{2}$，

$a=4-2\sqrt{2}$ のとき 最小値：$20-14\sqrt{2}$　をとる。…答

(3)の別解

(2)の　$a^2-8a+c^2+8=0$ から　$a^2+c^2=8a-8$ …⑤

(3)の　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a(a-1)+c^2=a^2+c^2-a$ に⑤を代入して

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=7a-8$ …⑥

(2)の　$4-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{2}$ から

$20-14\sqrt{2}\leqq 7-8a\leqq 20+14\sqrt{2}$

$20-14\sqrt{2}\leqq\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\leqq 20+14\sqrt{2}$

よって，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の値は

$a=4+2\sqrt{2}$ のとき最大値：$20+14\sqrt{2}$，

$a=4-2\sqrt{2}$ のとき 最小値：$20-14\sqrt{2}$　をとる。…答

$\boxed{4}$

$\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{1}$，$\boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{2}$，$\boxed{3}, \boxed{3}, \boxed{3}$ の9枚の札があり，同時にAが2枚，Bが3枚の札を取り出しても，順にAが2枚，Bが3枚の札を取り出しても同じであり，取り出し方の総数は，${}_9C_2 \times {}_7C_3$ (通り) である。

(1)　Aが同じ数字の札を取り出すとき，同じ数字の札は $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$ のいずれかであるから ${}_3C_1 = 3$ (通り)，同じ数字の札は3枚から2枚取り出すから ${}_3C_2 = 3$ (通り) である。

よって，求める確率は

$$\frac{3 \times 3}{{}_9C_2} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \cdots \text{答}$$

(2)　余事象の確率を用いて考える。

Aの持つ札の数字のいずれかが，Bの持つ札の数字のいずれかと同じである事象をPとすると，

余事象 $\overline{P}$ は，Aの持つ札の数字とBの持つ札の数字がすべて異なる事象である。

事象 $\overline{P}$ が起こるのは

（ⅰ）Aが同じ数字の札を取り出す場合　と　（ⅱ）Aが異なる数字の札を取り出す場合

がある。

（ⅰ）Aが同じ数字の札を取り出すとき

(1) を利用して，BはAが取り出した数字以外の6枚の札から3枚を取り出せばよいから

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{{}_6C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{35} = \frac{1}{7}$$

（ⅱ）Aが異なる数字の札を取り出すとき

Aの取り出す2枚の札は，$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$ のいずれか2種類で，それぞれ3枚あるから

$$\frac{{}_3C_2 \times 3^2}{{}_9C_2} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$ ［または (1) より余事象の確率を用いて，$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ としてもよい。］

次に，BはAが取り出した2種類の数字以外の3枚の札から3枚取り出せばよいから

$$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

よって，$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{35} = \frac{3}{140}$

したがって，(ⅰ), (ⅱ) より事象 $\overline{P}$ が起こる確率は

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{140} = \frac{23}{140}$$

よって，求める事象Pが起こる確率は

$$1 - \frac{23}{140} = \frac{117}{140} \cdots \text{答}$$