1

(1)　1試合目で優勝者が決定することはないので　$a_1=0$

2試合目で優勝者が決定するのは勝者が順に　A，A　または　B，B　であるから

その確率は　$a_2=\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)$

$=1-p$

3試合目で優勝者が決定するのは勝者が順に　A，C，C　または　B，C，C　であるから

その確率は　$a_3=\frac{1}{2}\cdot p\cdot p+\frac{1}{2}\cdot p\cdot p$

$=p^2$

4試合目で優勝者が決定するのは勝者が順に　A，C，B，B　または　B，C，A，A　であるから

その確率は　$a_4=\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}p(1-p)$

(2)　(1)の考察を繰り返すと，$3k$回目に優勝者が決定するときの優勝者は必ずCである。

勝者は順に　A，C，B，A，C，B，……，A，C，C

または　B，C，A，B，C，A，……，B，C，C

であるから，3回ごとの勝者の繰り返しに着目すると，求める確率は

$$a_{3k}=\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{2}p\cdot p+\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{2}p\cdot p$$

$$=p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}$$（これは，$k=1$のときも含んでいる）

(3)　Cが$3n$回目までに優勝する確率は　$\sum_{k=1}^{n}a_{3k}$　であるから

Cが優勝する確率は　$\sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}$　である。

これは初項p^2，公比$\frac{1}{2}p(1-p)$の無限等比級数の和である。

$0<p<1$であるから　$0<\frac{1}{2}p(1-p)<1$

よって，この級数は収束して，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}=\frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}$$

$$=\frac{2p^2}{p^2-p+2}$$

(4) (3)より，Cが優勝する確率が$\frac{1}{3}$以上となる条件は　$\frac{2p^2}{p^2-p+2} \geqq \frac{1}{3}$

ここで，(分母)$=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$　であるから

$5p^2+p-2 \geqq 0$

$0<p<1$　より　$\frac{-1+\sqrt{41}}{10} \leqq p<1$

$\frac{N}{100} \geqq \frac{-1+\sqrt{41}}{10}$　とおくと　$N \geqq -10+\sqrt{4100}$

$64^2=2^{12}=4096$，　$65^2=4225$　であるから

$54<-10+\sqrt{4100}<55$

したがって，求める最小値は　55　である。

$\boxed{2}$

(1) C： $y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2 \cdots ①$

①を a について整理して

$$a(x^2+2x)+(x^3+2x^2+2-y)=0 \cdots ②$$

②がどのような a の値に対しても成り立つ条件は

$$\begin{cases} x^2+2x=0 & \cdots ③ \\ x^3+2x^2+2-y=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

③より　$x(x+2)=0$　$\therefore\ x=-2, 0$

$x=-2$ のとき，④より　$y=2$

$x=0$ のとき，④より　$y=2$

したがって，曲線 C は2定点 A$(-2, 2)$，B$(0, 2)$ を常に通る。

(2) (1)より，2点A, Bを通る直線 L は $y=2 \cdots ⑤$

①, ⑤を連立して

$$x^3+(a+2)x^2+2ax=0$$

$$x(x+2)(x+a)=0$$

$$x=-2, -a, 0$$

よって，曲線 C と直線 L が異なる3点で交わり，その交点がすべて線分AB上にあるためには

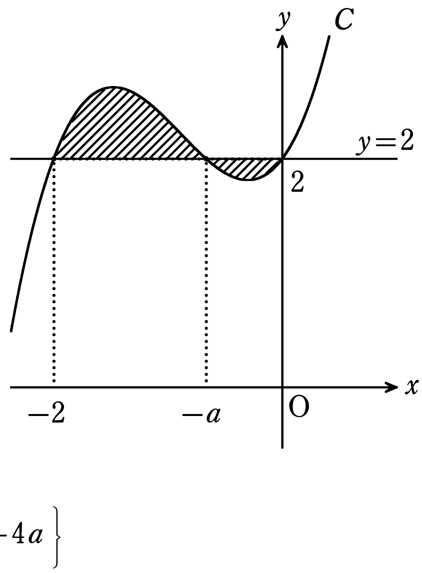
$-2<-a<0$ であればよいから　$0<a<2 \cdots ⑥$

(3) 右のグラフより

$-2 \leqq x \leqq -a$ のとき，$x^3+(a+2)x^2+2ax+2 \geqq 2$

$-a \leqq x \leqq 0$ のとき，$x^3+(a+2)x^2+2ax+2 \leqq 2$

であるから，面積 $S(a)$ は



$$S(a)=\int_{-2}^{-a}\{x^3+(a+2)x^2+2ax\}\,dx - \int_{-a}^{0}\{x^3+(a+2)x^2+2ax\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{-2}^{-a} - \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{-a}^{0}$$

$$=2\left\{\frac{1}{4}a^4-\frac{a+2}{3}\cdot a^3+a^3\right\}-\left\{4-\frac{a+2}{3}\cdot 8+4a\right\}$$

$$S(a)=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3} \cdots ⑦$$

⑦より　$S'(a)=-\dfrac{2}{3}a^3+2a^2-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{3}(a^3-3a^2+2)$

$$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0 \iff a=1\,,\ 1\pm\sqrt{3}$

⑥の $0<a<2$ を満たすのは　$a=1$ より

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小かつ最小：$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

⑦より　$S(1)=\frac{1}{2}$

したがって，上の増減表から

$a=1$ のとき最小値をとり，最小値は　$S(1)=\frac{1}{2}$

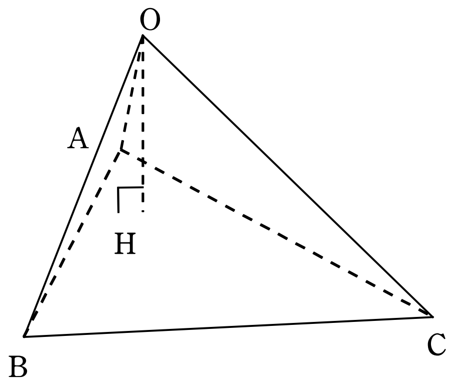
3

(1) 証明 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$　であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$$
$$=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{c}$$
$$=\frac{1}{8}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

したがって，点Hは3点A，B，Cが定める平面上に存在する。　終

(2) $\ell=1$ として計算して，最後に ℓ 倍するとよい。



$|\vec{a}|=\frac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$　であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$$1=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{8}$

図形の対称性により　　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{8}$

△OBCはOB=OCの直角二等辺三角形であるから　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{8}(6\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$　であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\frac{1}{64}(36|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+12\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{1}{64}(9+1+1+\frac{3}{2}+0+\frac{3}{2})=\frac{14}{64}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\geqq 0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{\sqrt{14}}{8}$

したがって　　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{\sqrt{14}}{8}\ell$

(3) 角度を問われているので，$\ell=1$ として計算してよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-(\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{8}|\vec{b}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c})$$
$$=\frac{14}{64}-(\frac{3}{32}+\frac{1}{8}+0)=0$$

よって　　$\angle\mathrm{OHB}=\frac{\pi}{2}$

(4)　$\ell=1$ として計算して，最後に ℓ^3 倍するとよい。

(3)より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

図形の対称性により　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 ABC に垂直であるから

底面を △ABC，高さを OH と考えて体積を求めるとよい。

△ABC は AB＝AC の直角二等辺三角形であるから，その面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

よって　$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{48}$

したがって　$V=\frac{\sqrt{14}}{48}\ell^3$

(4)の別解　O(0，0，0)，B(1，0，0)，C(0，1，0) として座標空間にうめこむ。

辺 BC の中点 M の座標は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ であり，平面 OAM に関して図形は面対称である。

辺 OA の中点を N とすると，△OAM は OM＝AM の二等辺三角形であるから　$\angle \mathrm{ANM}=\frac{\pi}{2}$

$\mathrm{OM}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{ON}=\frac{1}{4}$　であるから，$\angle \mathrm{MON}=\theta$　とおくと　$\cos\theta=\frac{1}{4}\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

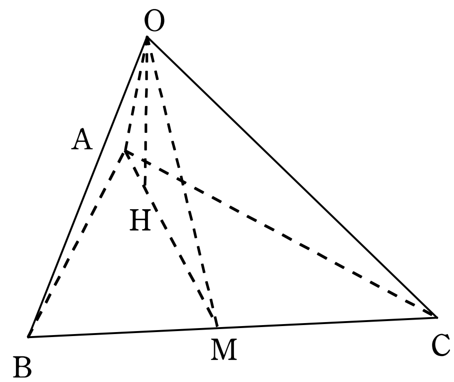
よって　$\sin\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}$

△OAM の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{\sqrt{14}}{16}$$

よって　$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{OAM}\cdot \mathrm{BC}=\frac{\sqrt{14}}{48}$

したがって　$V=\frac{\sqrt{14}}{48}\ell^3$



$\boxed{4}$

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}-\log(1-x)+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$，$f'(0)=0$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

右の表より，$-1<x<1$ で $f'(x)\geqq 0$

(2) $f(0)=0$ であり，(1)より，$f(x)$ は $-1<x<1$ で単調増加。

よって，$-1<x<0$で $f(x)<0$　したがって，$\dfrac{f(x)}{x}>0$

$0<x<1$で $f(x)>0$　したがって，$\dfrac{f(x)}{x}>0$

以上より，$-1<x<1$，$x\neq 0$ で $\dfrac{f(x)}{x}>0$ となる。

(3) $n\geqq 2$ のとき，(2)より，$x=\dfrac{1}{n}$ とおくと，$0<x<1$ を満たし，

$$\frac{f(x)}{x}=nf\left(\frac{1}{n}\right)=n\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)>0$$

これより，$\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\log\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

したがって，$\dfrac{n-1}{n}<\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n$

同様に，$x=-\dfrac{1}{n}$ とおくと，$-1<x<0$ を満たし，

$$\frac{f(x)}{x}=-nf\left(-\frac{1}{n}\right)=-n\left\{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

これより，$n\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<-\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=-\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

よって，$\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n<\dfrac{n}{n+1}$

ここで，$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{n^2-1}{n^2}>0$であるから，　両辺に，$\dfrac{n^2-1}{n^2}$ をかけて，

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}$$

したがって，$\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}$

以上より，2以上の整数 n に対して，$\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n$ が成り立つ。