$\boxed{1}$

ハート，スペード，クラブ，ダイヤの各マークのついた「A(エース)」のカードをそれぞれ A_1, A_2, A_3, A_4，各マークのついた「2」,「3」の8枚のカードを a, b, c, d, e, f, g, h と表す。

また，12枚のカードを横一列に並べると全事象は，12! (通り) である。

(1)　A_1, A_2, A_3, A_4 をまとめて一つと考えて，8枚のカード a, b, c, d, e, f, g, h と合わせて9枚の順列と考える。さらに，A_1, A_2, A_3, A_4 の4枚のカードの並べ方を考えて　$9! \times 4!$ (通り)

よって，求める確率は

$$\frac{9! \times 4!}{12!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{1}{55} \cdots \text{答}$$

(2)　8枚のカード a, b, c, d, e, f, g, h を並べて，その両端と間の9カ所から4カ所を選んで A_1, A_2, A_3, A_4 の4枚のカードを並べればよいから　$8! \times {}_9\mathrm{P}_4$ (通り)

よって，求める確率は

$$\frac{8! \times {}_9\mathrm{P}_4}{12!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{14}{55} \cdots \text{答}$$

(3)　(i)　「A(エース)」のカード2枚の連続した並びが2回起こるとき

8枚のカード a, b, c, d, e, f, g, h を並べて，その両端と間の9カ所から2カ所を選び，その2カ所に A_1, A_2, A_3, A_4 を2枚ずつ並べればよいから　$8! \times {}_9\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2$ (通り)

よって，その確率は

$$\frac{8! \times {}_9\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2}{12\,!} = \frac{36 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{4}{55}$$

(ii)　「A(エース)」のカード2枚の連続した並びが1回だけ起こるとき

8枚のカード a, b, c, d, e, f, g, h を並べて，その両端と間の9カ所から1カ所を選び，その1カ所に A_1, A_2, A_3, A_4 を2枚並べ，残った8カ所から2カ所を選び，A_1, A_2, A_3, A_4 の残った2枚を並べればよいから　$8! \times {}_9\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_8\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2$ (通り)

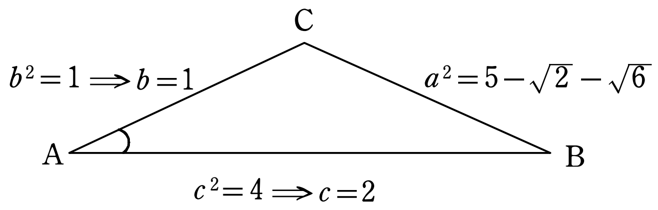
よって，その確率は

$$\frac{8! \times {}_9\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_8\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2}{12\,!} = \frac{9 \cdot 28 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{28}{55}$$

(i)と(ii)は排反であるから，求める確率は

$$\frac{4}{55} + \frac{28}{55} = \frac{32}{55} \cdots \text{答}$$

2



(1)　余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1+4-(5-\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2\cdot1\cdot2}$$

$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdots\text{答}\cdots①$$

(2)　$0°<\angle\mathrm{BAC}<180°$ より，$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdots②$$

よって，　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\therefore\ S=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdots\text{答}$$

(3)　①,②より，2倍角公式から

$$\sin 2\angle\mathrm{BAC}=2\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}\cdots③$$

ここで，②より，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<\dfrac{1}{2}=\sin30°$

①より，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos30°$

であるから，$\angle\mathrm{BAC}<30°$ である。よって，$2\angle\mathrm{BAC}<60°$ であるから③より　$2\angle\mathrm{BAC}=30°$

よって，　$\angle\mathrm{BAC}=15°\cdots$答

(3)の 別解

①より，2倍角公式から

$$\cos2\angle\mathrm{BAC}=2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots④$$

ここで，$\boxed{\text{本解}}$と同様に$\angle\mathrm{BAC}<30°$ であり，$2\angle\mathrm{BAC}<60°$ であるであるから，④より　$2\angle\mathrm{BAC}=30°$

よって，　$\angle\mathrm{BAC}=15°\cdots$答

$\boxed{3}$

(1)　$a_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ …①　として，数学的帰納法を用いて証明する。

証明

（i）　$n=1$ のとき

$a_1 = 1$，$\dfrac{b_1}{c_1} = \dfrac{1}{1} = 1$ なので $a_1 = \dfrac{b_1}{c_1}$ が成り立ち，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

（ii）　$n=k$ のとき

① が成り立つ，つまり，$a_k = \dfrac{b_k}{c_k}$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2+a_k} = \frac{1}{2+\dfrac{b_k}{c_k}} = \frac{c_k}{b_k+2c_k} = \frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}$$

となり，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

（i），(ii) より，すべての自然数 n について ① は成り立つ。（証明終わり）

(2)　$\alpha b_{n+1} - c_{n+1} = \alpha c_n - (b_n + 2c_n) = -b_n + (\alpha-2)c_n = -1\cdot\{b_n - (\alpha-2)c_n\}$

と変形でき，数列 $\{\alpha b_n - c_n\}$ が等比数列をなすとき

$$\alpha : (-1) = (-1) : (\alpha - 2)$$

であればよいから

$$\alpha(\alpha-2) = 1$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore\ \alpha = 1 \pm \sqrt{2}\ \cdots \text{答}$$

(3)　(2) より，数列 $\{\alpha b_n - c_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{\alpha}$ の等比数列である。

（i）　$\alpha = 1+\sqrt{2}$ のとき

$$b_n + (1-\sqrt{2})c_n = \{b_1 + (1-\sqrt{2})c_1\}\cdot\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$= -\sqrt{2}\,(1-\sqrt{2})^n \cdots ②$$

(ii)　$\alpha=1-\sqrt{2}$ のとき

$$b_n+(1+\sqrt{2})c_n=\{b_1+(1+\sqrt{2})c_1\}\cdot\left(-\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$
$$=\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n\cdots③$$

③−② より

$$2\sqrt{2}\,c_n=\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n+\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n$$

$$\therefore\ c_n=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\}$$

次に，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=c_{n-1}=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}\}$$

これは $n=1$ のとき $b_1=1$ を満たすので $n\geqq 1$ で成り立つ。

よって，$b_n=\dfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}\}$

さらに，(1) より，$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$ であるから

$$a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}}{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}$$

したがって，

$$a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}}{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}\cdots\text{答}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}\}\cdots\text{答}$$

$$c_n=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\}\cdots\text{答}$$

4

(1)　C ： $y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$ …①

①を a について整理して

$$a(x^2+2x)+(x^3+2x^2+2-y)=0 \quad \cdots ②$$

②がどのような a の値に対しても成り立つ条件は

$$\begin{cases} x^2+2x=0 & \cdots ③ \\ x^3+2x^2+2-y=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

③より　$x(x+2)=0$　$\therefore\ x=-2,0$

$x=-2$ のとき，④より　$y=2$

$x=0$ のとき，④より　$y=2$

したがって，曲線 C は2定点A$(-2,2)$，B$(0,2)$を常に通る。…答

(2)　(1)より，2点A,Bを通る直線 L は $y=2$ …⑤

①,⑤を連立して

$$x^3+(a+2)x^2+2ax=0$$

$$x(x+2)(x+a)=0$$

$$x=-2,\ -a,\ 0$$

よって，曲線 C と直線 L が異なる3点で交わり，その交点がすべて線分AB上にあるためには

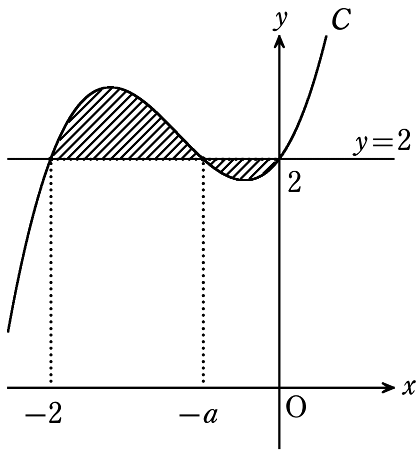
$-2<-a<0$ であればよいから　$0<a<2$ …答　…⑥

(3)　右のグラフより

$-2\leqq x\leqq -a$ のとき，$x^3+(a+2)x^2+2ax+2\geqq 2$

$-a\leqq x\leqq 0$ のとき，$x^3+(a+2)x^2+2ax+2\leqq 2$

であるから，面積 $S(a)$ は



$$S(a)=\int_{-2}^{-a}\{x^3+(a+2)x^2+2ax\}dx - \int_{-a}^{0}\{x^3+(a+2)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{-2}^{-a} - \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{-a}^{0}$$

$$=2\left\{\frac{1}{4}a^4-\frac{a+2}{3}\cdot a^3+a^3\right\}-\left\{4-\frac{a+2}{3}\cdot 8+4a\right\}$$

$$S(a)=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3} \quad \cdots ⑦$$

⑦より　$S'(a)=-\dfrac{2}{3}a^3+2a^2-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{3}(a^3-3a^2+2)$

$$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0 \iff a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

⑥の $0<a<2$ を満たすのは　$a=1$ より

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小かつ最小：$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	

⑦より　$S(1)=\dfrac{1}{2}$

したがって，上の増減表から

$a=1$ のとき最小値をとり，最小値は　$S(1)=\dfrac{1}{2}$ …答