$\boxed{1}$

(1)　$\sin 3x = -\sin x \iff \sin 3x + \sin x = 0$

$\iff 2\sin 2x \cos x = 0$

$\iff \sin 2x = 0$ または $\cos x = 0$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，$x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$

(2)　$\sin 3x = \sin x \iff \sin 3x - \sin x = 0$

$\iff 2\cos 2x \sin x = 0$

$\iff \cos 2x = 0$ または $\sin x = 0$

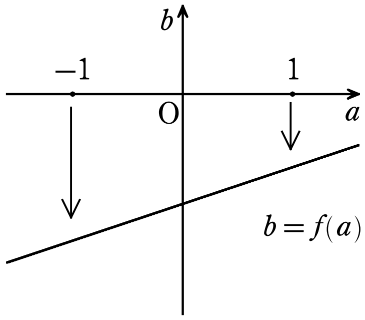
$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，$x = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi$

(3)　$f(a) = a\sin x - \sin 3x$ とおく。a－b 平面で直線 $b = f(a)$を考える。

$-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して，$b \leqq 0$ が成り立つ条件は

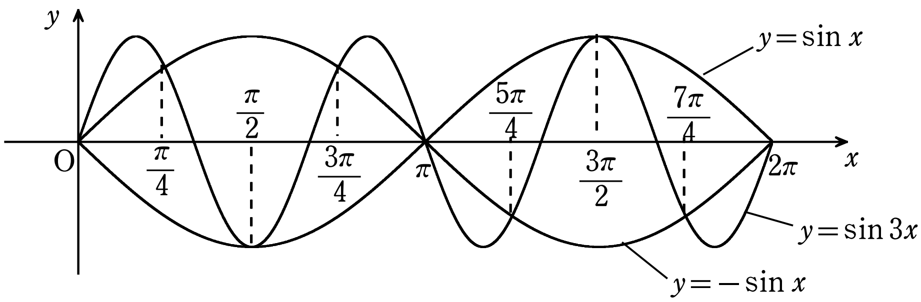
$f(1) \leqq 0$ かつ $f(-1) \leqq 0$

となることである。



$f(1) = \sin x - \sin 3x \leqq 0 \iff \sin x \leqq \sin 3x$

$f(-1) = -\sin x - \sin 3x \leqq 0 \iff -\sin x \leqq \sin 3x$



グラフより，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi,\ x = \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$

[別解]　$\sin 3x \geqq a\sin x \iff 3\sin x - 4\sin^3 x \geqq a\sin x$　…①

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから，

(ｉ)　$x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき，　$\sin x = 0$ であるから①は常に成り立つ。

(ii)　$0 < x < \pi$のとき，　$\sin x > 0$であるから①は，$3 - 4\sin^2 x \geqq a$となる。

$-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して，$3 - 4\sin^2 x \geqq a$ が成り立つには

$3 - 4\sin^2 x \geqq 1 \iff \sin^2 x \leqq \dfrac{1}{2}$ であればよい。

$0 < x < \pi$ より，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi$

(ii)　$\pi < x < 2\pi$のとき，　$\sin x < 0$であるから①は，$3 - 4\sin^2 x \leqq a$となる。

$-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して，$3 - 4\sin^2 x \leqq a$ が成り立つには

$3 - 4\sin^2 x \leqq -1 \iff \sin^2 x \geqq 1$であればよい。

$\pi < x < 2\pi$ より，$x = \dfrac{3\pi}{2}$

（i）～（iii）より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi$，$x = \dfrac{3\pi}{2}$，$2\pi$

$\boxed{2}$

$z \fallingdotseq 0$, $z \fallingdotseq \pm 1 \cdots$ ① とする。

(1) 線分 AB, ACはそれぞれ $z-1$, z^2-1 で表され，3点A, B, Cが一直線上にあることから

$$\frac{z^2-1}{z-1}=k\ (k\text{ は実数})$$

$$\frac{(z+1)(z-1)}{z-1}=k$$

① より，$z-1 \fallingdotseq 0$ であるから

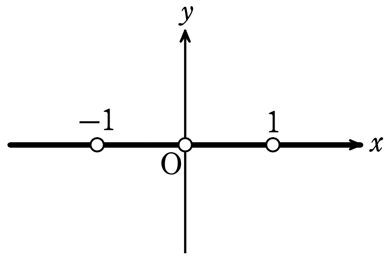
$$z+1=k$$

$$z=k-1$$

よって，

z は実数(ただし，$z \fallingdotseq 0$, $z \fallingdotseq \pm 1$) $\cdots$ ②

〔図1〕



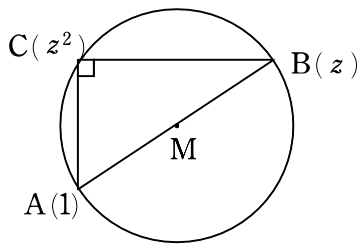
逆に，② が成り立つとき，3点 1, z, z^2 は実軸上にあり，3点A, B, Cは一直線上にある。

以上から，

z は実数(ただし，$z \fallingdotseq 0$, $z \fallingdotseq \pm 1$)

(2) 3点A, B, Cが∠Cを直角とする直角三角形の3頂点であるとき，右の〔図2〕のように，2点A, Bを直径の両端とする円の周上に点Cがあればよいから

〔図2〕



$$\left| z^2-\frac{1+z}{2} \right| = \left| \frac{1-z}{2} \right|$$

が成り立つ。

$$\left| \frac{2z^2-z-1}{2} \right| = \left| \frac{z-1}{2} \right|$$

$$\left| \frac{(2z+1)(z-1)}{2} \right| = \left| \frac{z-1}{2} \right|$$

① より，$z-1 \fallingdotseq 0$ であるから

$$|2z+1|=1$$

$$\left| z+\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

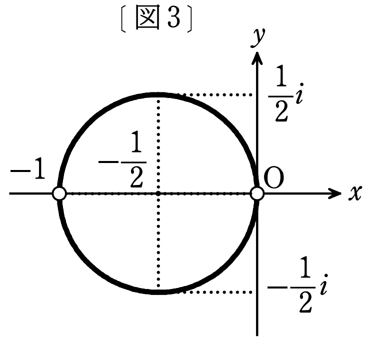
したがって，

$$\left| z+\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}\ (\text{ただし，} z \fallingdotseq 0,\ z \fallingdotseq -1) \cdots ③$$

③ より

求める図形を図示すると右の〔図3〕となる。

〔図3〕



2 (の続き)

(3) 3点A, B, Cが直角三角形の3頂点になるのは，(2)の場合と
　(ⅰ) ∠Aを直角とする直角三角形のとき
　(ⅱ) ∠Bを直角とする直角三角形のとき
の3つの場合がある。

(ⅰ) ∠Aを直角とする直角三角形のとき

右の〔図4〕のように，2点B, Cを直径の両端とする円の周上に点Aがあればよいから

$$\left|1-\frac{z+z^2}{2}\right|=\left|\frac{z-z^2}{2}\right|$$

が成り立つ。

$$\left|\frac{z^2+z-2}{2}\right|=\left|\frac{z^2-z}{2}\right|$$

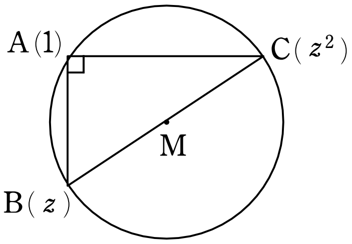
$$\left|\frac{(z+2)(z-1)}{2}\right|=\left|\frac{z(z-1)}{2}\right|$$

①より，$z-1\neq 0$ であるから

$|z+2|=|z|$（ただし，$z\neq-1$）…④

④は，$z=x+yi$ とおくと，直線 $x=-1$（ただし，$y\neq 0$）を表す。

〔図4〕



(ⅱ) ∠Bを直角とする直角三角形のとき

右の〔図5〕のように，2点A, Cを直径の両端とする円の周上に点Bがあればよいから

$$\left|z-\frac{1+z^2}{2}\right|=\left|\frac{1-z^2}{2}\right|$$

が成り立つ。

$$\left|\frac{z^2-2z+1}{2}\right|=\left|\frac{z^2-1}{2}\right|$$

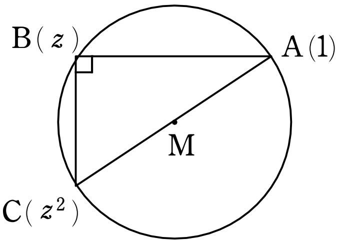
$$\left|\frac{(z-1)^2}{2}\right|=\left|\frac{(z+1)(z-1)}{2}\right|$$

①より，$z-1\neq 0$ であるから

$|z-1|=|z+1|$（ただし，$z\neq 0$）…⑤

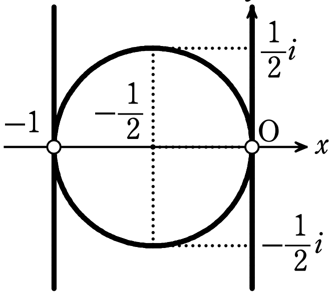
⑤は，$z=x+yi$ とおくと，直線 $x=0$（ただし，$y\neq 0$）を表す。

〔図5〕



したがって，③, ④, ⑤より
求める図形を図示すると右の〔図6〕となる。

〔図6〕



$\boxed{3}$

(1)　$n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$

連続する3整数の積は6の倍数であるから，n^3-n は6の倍数である 。

よって，n を6で割った余りと n^3を6で割った余りは等しい。

(2)　$(a^3+b^3)-(a+b)=(a^3-a)+(b^3-b)$
$=(a-1)\cdot a\cdot(a+1)+(b-1)b\cdot(b+1)$

連続する3整数の積は6の倍数であるから，$(a^3+b^3)-(a+b)$ は6の倍数である。

よって，$a+b$ を6で割った余りと a^3+b^3 を6で割った余りは等しい。…①

$$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3=(c+1)^3-c^3$$
$$=3c^2+3c+1$$
$$=3c(c+1)+1$$

連続する2整数の積は2の倍数であるから，$3c(c+1)$ は 6の倍数である。

よって，a^3+b^3 を6で割った余りは1である。…②

①，②より，$a+b$ を6で割ったは1である。

(3)　$1\leqq c\leqq 10$ より $a^3+b^3=(c+1)^3-c^3=3c^2+3c+1\leqq 331$　よって，$a^3+b^3\leqq 331$ …③

$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ であるから，$a+b$ を6で割った余りが1となるとき，

$(a,\ b)=(1,\ 6),(2,\ 5),(3,\ 4),(3,10),(4,\ 9),(5,\ 8),(6,\ 7),(9,10)$

このうち，条件③を満たすのは，$(a,\ b)=(1,\ 6),(2,\ 5),(3,\ 4)$のみである。

$a^3+b^3=3c^2+3c+1$，かつ，$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ より，

$(a,\ b)=(1,\ 6)$のとき，　$c=8$

$(a,\ b)=(2,\ 5)$のとき，　条件を満たす整数 c は存在しない。

$(a,\ b)=(3,\ 4)$のとき，　$c=5$

よって，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 6,\ 8),(3,\ 4,\ 5)$

4

(1)　n は正の整数であるから，関数 $f(x)=x^{2n}$ は偶関数であり，曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称である。

また，2 点 $\mathrm{A}(-t, t^{2n})$，$\mathrm{B}(t, t^{2n})$ は y 軸に関して対称であり，線分 AB の垂直二等分線は y 軸である。

したがって，3 点 $\mathrm{O}(0, 0)$，$\mathrm{A}(-t, t^{2n})$，$\mathrm{B}(t, t^{2n})$ を通る円 C の中心は y 軸上にあるから $(0, q(t))$ とおけ，原点 O を通ることから，半径 $r(t)=q(t)$ である。

$$p(t)=0,\ r(t)=q(t) \cdots ①$$

① より，円 C の方程式は，$x^2+\{y-q(t)\}^2=\{q(t)\}^2 \cdots ②$ とおける。

② は，点 $\mathrm{B}(t, t^{2n})$ を通ることから

$$t^2+\{t^{2n}-q(t)\}^2=\{q(t)\}^2$$

$$t^2+t^{4n}-2t^{2n}q(t)=0$$

$$q(t)=\frac{1}{2}\left(t^{2n}+\frac{1}{t^{2n-2}}\right)=\frac{1}{2}\left\{t^{2n}+\left(\frac{1}{t}\right)^{2n-2}\right\} \cdots ③$$

③ において，$n \geqq 2$ のとき，$t \to +0$ とすると $\displaystyle\lim_{t \to +0} t^{2n}=0$，$\displaystyle\lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{t}\right)^{2n-2}=+\infty$ であり，

$\displaystyle\lim_{t \to +0} q(t)=+\infty$ (発散) するので題意に反する。

よって，$n=1$ のときを考える。

このとき，① より，$p(t)=0$，$r(t)=q(t)=\dfrac{1}{2}(t^2+1)$ であり，

$$a=\lim_{t \to +0} p(t)=0$$

$$b=\lim_{t \to +0} q(t)=\lim_{t \to +0}\frac{1}{2}(t^2+1)=\frac{1}{2}$$

$$c=\lim_{t \to +0} r(t)=\lim_{t \to +0} q(t)=\frac{1}{2}$$

とすべて収束し，題意を満たすので，$n=1$ である。

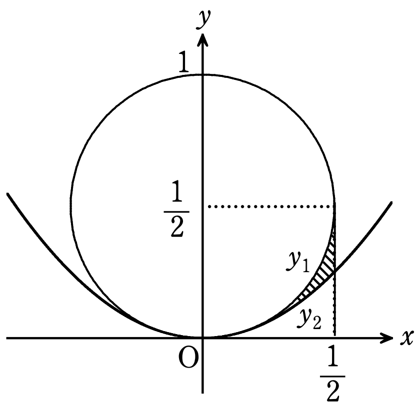
以上から，

$$a=0,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2}$$

(2)　(1) より，円 C の方程式は $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4} \cdots ④$ となる。

円 ④ と放物線 $y=x^2$ は，原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ で接している。

このことから，円 ④ と放物線 $y=x^2$ および直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれる図形は右の図の斜線部分になる。



右の図において，y_1 は円 ④ の下半分を表すので

$$y_1=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$$

y_2 は，放物線 $y=x^2$ であるから

$$y_2=x^2$$

図より，区間$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$において，$y_1 \geqq y_2$である。

よって，求める体積Vは

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{2}}(y_1{}^2 - y_2{}^2)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)^2 - (x^2)^2\right\}dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x^2 - x^4 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x^2 - x^4\right)dx - \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,dx$$

（ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\,dx$は半径$\dfrac{1}{2}$の四分円の面積を表すので$\dfrac{\pi}{16}$である。）

$$= \frac{97}{480}\pi - \frac{\pi^2}{16}$$

以上から，　$V = \dfrac{97}{480}\pi - \dfrac{\pi^2}{16}$