1

(1)　Tが4連勝で優勝する場合の余事象で考えて，

$$1-\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{8}{9}$$

(2)　以下，S，Tが勝つ場合をそれぞれ s，t で表すとする。

Tが4連勝で優勝するとき，Tのホームゲームで（1）よりその確率は $\frac{1}{9}$

Tが4勝1敗で優勝するとき（図中の ◁▷ は並べ換え）

Sのホーム　　Tのホーム

s，t ／ t，t，t　$\cdots\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times 2\right)\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$

t，t ／ s，t，t　$\cdots\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times 2\right)\times\frac{5}{6}=\frac{1}{27}$

よって，求める確率は，$\frac{1}{9}+\frac{5}{18}+\frac{1}{27}=\frac{23}{54}$

(3)　まず，第1，2戦ともにＳが勝つ確率は，$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

第3戦以降について，（図中の ◁▷ は並べ換え）

Tのホーム　　Sのホーム

s，s ／　Sの2連勝 $\cdots\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

s，t，s ／　Sの2勝1敗 $\cdots\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times 2\right)\times\frac{1}{6}=\frac{5}{108}$

s，t，t ／ s　Sの2勝2敗 $\cdots\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times 3\right)\times\frac{3}{5}=\frac{5}{24}$

s，t，t ／ t，s　Sの2勝3敗 $\cdots\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times 3\right)\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{12}$

t，t，t ／ s，s　Sの2勝3敗 $\cdots\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{24}$

以上より，求める確率は

$$\frac{9}{25}\times\left(\frac{1}{36}+\frac{5}{108}+\frac{5}{24}+\frac{1}{12}+\frac{5}{24}\right)=\frac{9}{25}\times\frac{31}{54}=\frac{31}{150}$$

$\boxed{2}$

(1)　定義に従って，P_1，P_2，P_3，… を書き上げていくと，

$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，

$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$，$(1,\ 6)$，…

よって，$(2,\ 4)$ は 12 番目である。また，P_{10}は $(4,\ 1)$ である。

(2)　(1)を以下のように，第k群にk個の点の座標があるような群に分ける。

$(1,\ 1)$ | $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ | $(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$ | $(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$ |

$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$ | $(1,\ 6)$，…

座標 $(n,\ n)$ は第$(2n-1)$ の n 番目。よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=1+2+3+\cdots+(2n-2)+n=\frac{(2n-2)(1+2n-2)}{2}+n=2n^2-2n+1$$

これは，$n=1$のときも成り立つので，$a_n=2n^2-2n+1$ $(n\geqq 1)$

(3)　(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

$\boxed{3}$

理系問題と同じ

$\boxed{4}$

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，条件より

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=1 \cdots ① \\ f(-1)=a-b+c=-1 \cdots ② \end{cases}$$

①＋② より　$a+c=0$　$\therefore c=-a$

①－② より　$\therefore b=1$

よって，　$f(x)=ax^2+x-a=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2-a-\dfrac{1}{4a}$ …③

③より，頂点の x 座標は $-\dfrac{1}{2a}$ であり，$-\dfrac{1}{2a}>0$ より　$\therefore a<0$ …④

よって，$-a=A\ (A>0)$ と置き換えると，相加平均と相乗平均の大小関係から

頂点の y 座標：　$-a-\dfrac{1}{4a}=A+\dfrac{1}{4A}\geqq 2\sqrt{A\times\dfrac{1}{4A}}=1$ …⑤

⑤の等号成立は，$A=\dfrac{1}{4A}\ (A>0)$ のとき，すなわち $A=\dfrac{1}{2}$ つまり，$a=-\dfrac{1}{2}$ (④に適する)のときに成り立つ。

したがって，求める頂点の y 座標の最小値は1である。

(2)　③より，頂点の y 座標について

$$0\leqq -a-\frac{1}{4a}\leqq 2 \quad \therefore -2\leqq \frac{4a^2+1}{4a}\leqq 0 \cdots ⑥$$

$4a^2+1>0$，$a\neq 0$ より　$a<0$　このとき，⑥の右の不等式は成立する。

また，⑥の左の不等式 $-2\leqq \dfrac{4a^2+1}{4a}$ より

$$4a^2+8a+1\leqq 0$$

$$\therefore \frac{-2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$$ (これは，$a<0$ を満たす。)…⑦

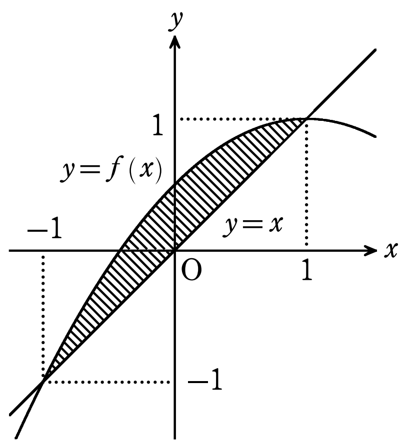
$y=f(x)$ と $y=x$ から y を消去して

$$ax^2+x-a=x$$

$$a(x+1)(x-1)=0$$

$a\neq 0$ より，$x=\pm 1$

$a<0$ より，$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフの位置関係は右の図のようになる。



題意の面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{1}\{f(x)-x\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}a(x^2-1)\,dx$$

$$=a\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$

$\boxed{4}$ (の続き)

$$S=-a\times\frac{2^3}{6}$$

$$\therefore S=-\frac{4}{3}a$$

⑦より

$$\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\leqq S\left(=-\frac{4}{3}a\right)\leqq\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$$

したがって，題意の面積の最大値，最小値について，

最大値：$\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$，　最小値：$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$